地球電磁場の變化に就いて

星　　爲　　藏

On the Geo-electromagnetic Variations.

By T. Hoshi.

The general features of geo-electromagnetic variations of external origin, as for the variation's period we confine ourselves from diurnal change to a few seconds, are trated theoretically in the present paper.

The results are summarized as follows:

1) the variation of atmospheric electricity, excepting the disturbances of meteorological and some local nature, is connected with the variation of vertical component of electric current or some other factors producing the same effect, at the variation's origin which is considered to be existent in the upper ionized region; and

2) the variations of geo-magnetism and so-called earth current are due to the variations of lateral components of electric current, and the relations between them are depending upon the physical constants in the earth body; and

3) the well known proportion of internal magnetic field to external one and phase difference between them are attributed to the discontinuous distribution of electric conductivity and magnetic permeability interior the earth crust, and the demanded conditions are not so unaccountable as given by Dr. S. Chapmann, i. e. the triple layer construction of the earth body deduced from seismic research and other branch of geophysics, seems to play a role significant by the geo-electromagnetism.

§0. 序

地球磁氣，地電流，空中電位差等の變化（週期は 24 時間以下のもの）を統一して考へようと思ふ．從來，地磁氣，地電流に關する理論に於ては，大氣の電導率を 0 と見做すが故に，空中電位差との關係は明瞭に表はされてゐない．こゝでは實際の數値を用ひて，夫等相互間の關係を考へることにする．

§1. 基本式

電磁場の時間的，空間的變化を一般的に取扱ふ爲に，Maxwell の基本式より出發する．電導率 σ，電媒常數 ε，誘磁率 μ が何れも，空間的に一様であれば，基本式は次の如くに書くことが出來る．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)}\ \dfrac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathfrak{B}=\mathfrak{C}. & \text{d)}\ \operatorname{rot}\mathfrak{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}. \\ \text{b)}\ \mathfrak{C}=\dfrac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}+\dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}. & \text{e)}\ \operatorname{div}\mathfrak{B}=0. \\ \text{c)}\ \operatorname{div}\mathfrak{E}=0. & \end{array}\right\} \tag{1}$$

磁氣感應 $\mathfrak{B}$ が vector potential $\mathfrak{A}$ から導かれるならば，次の關係が存在する．

$$\text{a)}\quad \mathfrak{B}=\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}. \qquad \text{b)}\quad \mathrm{div}\,\mathfrak{A}=0. \tag{2}$$

$\mathfrak{A}$ の各成分を，極座標 (r,θ,α) を用ひて，次の如くに與ふれば (2.b) の條件を滿足する．

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_r&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\overline{\pi}_1}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2\overline{\pi}_1}{\partial\alpha^2}.\\
\mathfrak{A}_\theta&=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\overline{\pi}_1)}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\overline{\pi}_2}{\partial\alpha}.\\
\mathfrak{A}_\alpha&=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\overline{\pi}_1)}{\partial r\partial\alpha}-\frac{\partial\overline{\pi}_2}{\partial\theta}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

玆に，$\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2$ は時間的，空間的函數である．是を Hertz function と呼ぶことにする．$\mathfrak{B}$ の各成分は次の如くである．

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{B}_r&=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\overline{\pi}_2}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2\overline{\pi}_2}{\partial\alpha^2}.\\
\mathfrak{B}_\theta&=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\nabla^2\overline{\pi}_1)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\overline{\pi}_2)}{\partial r\partial\theta}.\\
\mathfrak{B}_\alpha&=-\frac{\partial}{c\theta}(\nabla^2\overline{\pi}_1)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\overline{\pi}_2)}{\partial r\partial\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

電流 $\mathfrak{C}$ の各成分は (1.a) より次の如くになる．

$$\left.\begin{aligned}
\mu\mathfrak{C}_r&=-\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right]\nabla^2\overline{\pi}_1.\\
\mu\mathfrak{C}_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\nabla^2\overline{\pi}_1)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\nabla^2\overline{\pi}_2)\\
\mu\mathfrak{C}_\alpha&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\alpha}(r\nabla^2\overline{\pi}_1)+\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2\overline{\pi}_2)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2$ が共に e^{-ipt} $\left(p=\frac{2\pi}{T},\ T=\text{週期}\right)$ なる因子を有するものとして

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\pi}_1(r,\theta,\alpha\,;\,t)&=\pi_1(r,\theta,\alpha)e^{-ipt}\\
\overline{\pi}_2(r,\theta,\alpha\,;\,t)&=\pi_2(r,\theta,\alpha)e^{-ipt}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

とおくことにする．

(1.d) と (2.a) より
$$\mathfrak{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} \tag{7}$$

(1.b) と (7) より
$$\mathfrak{C}=-\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} \tag{8}$$

(5), (6), (8) より

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\pi_1&=-\left(\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}p_\iota+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}p^2\right)\pi_1.\\ \nabla^2\pi_2&=-\left(\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}p_\iota+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}p^2\right)\pi_2\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

なる關係を得る.

傳導電流が省略されるならば,

$$\nabla^2\pi_j=-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}p^2\pi_j,\qquad j=1,2.;\tag{10}$$

變位電流が省略されるならば,

$$\nabla^2\pi_j=-\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}p_\iota\pi_j,\qquad j=1.2\tag{11}$$

となる. (9), (10), (11) を滿足する Hertz function は夫々次の如きものである.

$$\left.\begin{aligned}\pi_j&=\frac{1}{\sqrt{r}}Z_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{p\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\sqrt[4]{\left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon p}\right)^2+1}\,e^{\iota\frac{\varphi}{2}}\cdot r\right)P_\nu^\lambda(\cos\theta)e^{-\iota\lambda\alpha}\\ \varphi&=\mathrm{arc}\tan\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon p}\end{aligned}\right\}\tag{9.1}$$

$$\pi_j=\frac{1}{\sqrt{r}}Z_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}pr\right)P_\nu^\lambda(\cos\theta)e^{-\iota\lambda\alpha}\tag{10.1}$$

$$\pi_j=\frac{1}{\sqrt{r}}Z_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{4\pi\sigma\mu p}}{c}e^{\iota\frac{\pi}{4}}\cdot r\right)P_\nu^\lambda(\cos\theta)e^{-\iota\lambda\alpha}\tag{11.1}$$

玆に, $P_\nu^\lambda(\cos\theta)$ は λ 階 ν 次の陪函數, $Z_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$ は Bessel function で, 例へば

$$Z_{\nu+\frac{1}{2}}(z)=c_1J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)+c_2Y_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$$

なる形を有し, 適當に定めうるべき係數 c_1, c_2 を含む.

$r=R$ に於て, 物理的性質の異る二種の媒質が相接するときには, 境界面に於て, vector potential の tangential component が連續なること及び magnetic force の連續なるべきことが必要であるから, π_1, π_2 は次の條件を滿足することを要する,

$$\left.\begin{aligned}&\text{a)}\ \frac{\partial}{\partial r}(r\pi_1)=\frac{\partial}{\partial r}(r\pi_1'). &&\text{c)}\ \pi_2=\pi_2'\\ &\text{b)}\ \frac{1}{\mu}\nabla^2\pi_1=\frac{1}{\mu'}\nabla^2\pi_1'. &&\text{d)}\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}(r\pi_2)=\frac{1}{\mu'}\frac{\partial}{\partial r}(r\pi_2')\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

但し $r=R$ とす.

§2. 地球電磁場の豫備的考察

大氣中に於ける電導率は, 地表面附近に於て凡そ 2×10^{-4} e.s.u., 數粁上空に於ては地表の値の 10

倍以上に達する．電媒常數，誘磁率は共に1に近い値である．

地殼内の電導率は，表面近くに於ては，時と場所に依つて異るけれども，深さが增すに從ひ電導率は一定値に收斂する傾向を有し，400 米の深さに於ては，殆ど一樣に 10^8 e.s.u. である[1]．電媒常數，誘磁率は共に，表面附近に於ては1に近いものと考へられる．

地殼內深部に於ける電導率，誘磁率に就ては，吾々は何等の知識を持たないのであるが，地球物理學の他の分科の硏究より，地球內部に於て，構成物質の物理的性質が不連續的に變化する層が二，三あることが信ぜられるから，吾々も亦，地殼內部に於て，電導率，誘磁率が不連續的に變化するものと考へる．

吾々は，簡單の爲に，不連續層が一つだけある場合を考察することにする．

扨，地球外有限の距離に，電磁場の變化源があり，地球表面に於て，その變化の形が知られてゐるものとした場合，地球內外の電磁場の關係を求めよう．

外部變化源の變化の週期は，日變化より1分內外の範圍にあるものを考へる．

變化源と地面間に於ける電導率，誘磁率等は何れも一樣であると假定し，$\varepsilon=\mu=1$, $\sigma=5\times10^{-4}$ e.s.u. とする．地殼外層に於ては，$\varepsilon=\mu=1$, $\sigma\approx10^9$ e.s.u.，內層に於ては，$\varepsilon=1$, σ, μ は外層の夫等の値に等しいか或は，より大なるものとする．

斯樣な狀態に於ては，地殼內に於て變位電流を省略しても，それより生ずる誤差は極めて小さい．空氣中に於ては，週期3時間以上であれば，凡そ 9% 以下の誤差の範圍に於て變位電流を省略することが出來る．

各層內の量を區別する爲に，index 0, 1, 2 を附し夫々，空氣層，地殼外層及び內層の量なることを示すものと約束する．

便宜上 $\left(\dfrac{p\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\sqrt[4]{\left(\dfrac{4\pi\sigma}{\varepsilon p}\right)^2+1}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)_s=\xi_s$, $\xi_s+=\rho_s(r)e^{i\frac{\varphi}{2}}$ と略記する．こゝに $\rho_s(r)$ は numerical distance と呼ばれる量である．

各層に於ける Hertz function は，境界を考察して，次の如くに與へられる．

$$\left.\begin{aligned}
\pi_j^0&=\frac{1}{\sqrt{r}}[E_\nu^0J_{\nu+\frac{1}{2}}(\xi_0r)+F_\nu^0Y_{\nu+\frac{1}{2}}(\xi_0r)]P_\nu^\lambda(\cos\theta)e^{-i\lambda\alpha} && r>a\\
\pi_j^1&=\frac{1}{\sqrt{r}}[E^1_\nu J_{\nu+\frac{1}{2}}(\xi_1r)+F_\nu^1Y_{\nu+\frac{1}{2}}(\xi_1r)]P_\nu^\lambda(\cos\theta)e^{-i\lambda\alpha} && a>r>b\\
\pi_j^2&=\frac{1}{\sqrt{r}}E^2_\nu J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_2r)P_\nu^\lambda(\cos\theta)e^{-i\lambda\alpha} && r<b
\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

(1) J. Koenigsberger: Aufsuchung von Wasser mit geophysikalischen Methoden. Beiträge z angew. Geophysik, Bd. 3, S. 493, 1933.

但し，a は地球半徑，b は不連續層の半徑とす．E_ν^0 は既知の係數とし，$F_\nu^0, E_\nu^1, F_\nu^1, E_\nu^2$ は境界條件より決定されるべき係數である．

座標系は，地球中心に原點を有し，地球上に於て $\theta=0$ は北極に一致し，α は東に向つて測つたときであるとする．

§3. 空中電位差

先づ，π_1 に就て考へる．Hertz function は次の如くである．

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\pi}_1{}^0&=\frac{1}{\sqrt{r}}[A^0{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_0r)+B^0{}_mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_0r)]P^k{}_m(\cos\theta)e^{-i(pt+k\alpha)} && r>a\\
\bar{\pi}_1{}^1&=\frac{1}{\sqrt{r}}[A^1{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1r)+B^1{}_mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1r)]P^k{}_m(\cos\theta)e^{-i(pt+k\alpha)} && a>r>b\\
\pi_1{}^2&=\frac{1}{\sqrt{r}}A^2{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_2r)P^k{}_m(\cos\theta)e^{-i(pt+k\alpha)} && r<b
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

こゝに，$A_m{}^0$ は既知，其他の係數は境界條件より決定される．境界條件は (12. a, b) を少しく變形して次の如くである．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sigma_0}{\sigma_1}[A^0{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_0a)+B^0{}_mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_0a)]=A^1{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1a)+B^1{}_mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1a)\\
&A^0{}_mj_0(a)+B^0{}_my_0(a)=A^1{}_mj_1(a)+B^1{}_my_1(a)\\
&A^1{}_m=J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1b)+B^1{}_mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1b)=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}A^2{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_2b)\\
&A^1{}_mj_1(b)+B^1{}_my_1(b)=A^2{}_mj_2(b)
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}
j_\lambda(r)&=\xi_\lambda rJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)-mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)\\
y_\lambda(r)&=\xi_\lambda rY_{m-\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)-mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_2b)
\end{aligned}\qquad \lambda=0,1,2\right\}\qquad(17)$$

である．電磁場の各成分は，(4), (5) 及び (15) に依つて次の如くに求められる．

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{B}_r{}^\lambda&=0\\
\mathfrak{B}_\theta{}^\lambda&=\frac{4\pi\sigma kp}{c^2\sqrt{r}\sin\theta}[A^\lambda{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)+B^\lambda{}_mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)]P^k{}_m(\cos\theta)e^{-i(pt+k\alpha)}\\
\mathfrak{B}_\alpha{}^\lambda&=\frac{4\pi\sigma pi}{c^2\sqrt{r}}[A^\lambda{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)+B^\lambda{}_mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)]\frac{\partial P^k{}_m(\cos\theta)}{\partial\theta}e^{-i(pt+k\alpha)}
\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_r{}^\lambda&=-\frac{m(m+1)pi}{cr\sqrt{r}}[A^\lambda{}_mJ_{m+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)+B^\lambda{}_mY_{m+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)]P^k{}_m(\cos\theta)e^{-i(pt+k\alpha)}\\
\mathfrak{E}_\theta{}^\lambda&=-\frac{pi}{cr\sqrt{r}}[A^\lambda{}_mj_\lambda(r)+B^\lambda{}_my_\lambda(r)]\frac{\partial P^k{}_m(\cos\theta)}{\partial\theta}e^{-i(pt+k\alpha)}\\
\mathfrak{E}_\alpha{}^\lambda&=\frac{pk}{cr\sqrt{r}}[A^\lambda{}_mj_\lambda(r)+B^\lambda{}_my_\lambda(r)]P^k{}_m(\cos\theta)e^{-i(pt+k\alpha)}
\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

(16) より B_m^0 を求むれば，次の如くである.

$$B_m^0 = \left[\frac{\dfrac{\sigma_0}{\sigma_1} J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_0 a) U_m - j_0(a) V_m}{-\dfrac{\sigma_0}{\sigma_1} Y_{m+\frac{1}{2}}(\xi_0 a) U_m + y_0(a) V_m} \right] A_m^0 \tag{20}$$

但し

$$\left.\begin{aligned} U_m &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_2 b)\{j_1(a)y_1(b) - j_1(b)y_1(a)\} + j_2(b)\{J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)y_1(a) - j_1(a)Y_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1 b) \\ V_m &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_2 b)\{J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)y_1(b) - j_1(b)Y_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)\} \\ &\qquad + j_2(b)\{J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)Y_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1 a) - J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)Y_{m+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)\} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

空中電氣，地磁氣，地電流等の，實際吾々が測定してゐる成分間の關係を對比してみよう.

i) 磁場南北成分と空中電位差

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{B}_\theta^0}{\mathfrak{E}_r^0} &= -\frac{ke^{-i\frac{\pi}{2}}}{m(m+1)\sin\theta} \frac{4\pi\sigma_0 a}{c}. \\ \frac{4\pi\sigma_0 a}{c} &= \frac{4\pi \cdot 5\times10^{-4} \cdot 6\,37\times10^8}{3\times10^{10}} = 13{\cdot}3\times10^{-5}\,(\Gamma/\text{e s.u.}) = 4{\cdot}4\times10^{-2}\,(\gamma/\text{volt/cm}) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ii) 地電流東西成分と空中電位差

$$\frac{\mathfrak{E}_a^1}{\mathfrak{E}_r^0} = -\frac{ke^{-i\frac{\pi}{2}}}{m(m+1)} \frac{A_m^1 j_1(a) + B_m^1 y_1(a)}{A_m^0 J_{m+\frac{1}{2}}(\xi^0 a) + B_m^0 Y_{m+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)}. \tag{23}$$

この式は. (16) の第二式と Lommel の恒等式：

$$J_\nu(\xi r) Y_{\nu-1}(\xi r) - J_{r-}J_{\nu-1}(\xi r) Y_\nu(\xi r) = \frac{2}{\pi\xi r} \tag{L$_1$}$$

を用ひて次の如く變形される.

$$\frac{\mathfrak{E}_a^1}{\mathfrak{E}_r^0} = -\frac{ke^{-i\frac{\pi}{2}}}{m(m+1)} \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \frac{U_m}{V_m}. \tag{23·1}$$

外層の厚さ $(a-b)$ が充分小さく，その自乘以上が省略出來るものとすれば，

$$\frac{U_m}{V_m} = \left[\frac{\left\{ m(2+(2m+1)\delta)\left(\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right) - 2\delta\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\xi_1 a\cdot\xi_1 b \right\} J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_2 b) + \Big(2+(2m+1)\Big)\delta\xi_2 b J_{m-\frac{1}{2}}(\xi_2 b)}{\left\{ 2\delta m\left(\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right) + \Big(2-(2m+1)\delta\Big)\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\dfrac{b}{a} \right\} J_{m+\frac{1}{2}}(\xi_2 b) + 2\delta\xi_2 b J_{m-\frac{1}{2}}(\xi_2 b)} - m \right] \tag{24}$$

但し

$$\delta = \frac{a-b}{a} \tag{25}$$

とすることが出來る．これは又，W_m を數係數として

$$\frac{U_m}{V_m}=W_m e^{-i\varphi_m} \tag{24.1}$$

なる形に書くことが出來る．

従つて，(23) は

$$\frac{\mathfrak{E}^1{}_a}{\mathfrak{E}^0{}_r}=-\frac{k}{m(m+1)}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_m\right)}\frac{\sigma_0}{\sigma_1}W_m,$$

$\mathfrak{E}_a{}^1$ を mv/km, $\mathfrak{E}^0{}_r$ を volt/cm にて測るならば

$$\frac{\mathfrak{E}^1{}_a}{\mathfrak{E}^0{}_r}=-\frac{k}{m(m+1)}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_m\right)}0.23\,W_m\times10^{-4}\ (\mathrm{mv/km/volt/cm}) \tag{23.2}$$

となる．

一例として $m=2$, $\delta=0{\cdot}3$, $\sigma_1=21.8\times10^8$ e.s.u., $\sigma_2=360\,\sigma_1$ とした場合の $\frac{U_m}{V_m}$ の値を示す．

i) $T=24^{\mathrm{h}}$ ならば $\rho_1 a=30$, $W_m e^{-i\varphi_m}=153\,e^{-i70^\circ}$.

ii) $T=10^{\mathrm{m}}$ ならば $\rho_1 a=360$, $W_m e^{-i\varphi_m}=3660\,e^{-i49^\circ}$.

§4. 地磁氣と地電流

次に，π_2 に就て考へる．

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\pi}_2{}^0&=\frac{1}{\sqrt{r}}[C^0{}_nJ_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 r)+D^0{}_nY_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 r)]\,P^l{}_n(\cos\theta)e^{-i(pt+l\alpha)} && r>a\\
\overline{\pi}_2{}^1&=\frac{1}{\sqrt{r}}[C^1{}_nJ_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 r)+D^1{}_nY_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 r)]\,P^1{}_n(\cos\theta)^{-i(pt+l\alpha)} && a>r>b\\
\overline{\pi}_2{}^2&=\frac{1}{\sqrt{r}}C^2{}_nJ_{n+\frac{1}{2}}(\xi_2 r)P_n{}^1(\cos\theta)e^{-i(pt+l\alpha)} && r<b
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$C^0{}_n$ は既知，其他の係數は次の境界條件より定められる．

$$\left.\begin{aligned}
&C^0{}_nJ_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)+D^0{}_nY_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)=C^1{}_nJ_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)+D^1{}_nY_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)\\
&\mu_1C^0{}_nj_0(a)+\mu_1D^0{}_ny_0(a)=C_n{}^1j_1(a)+D^1{}_ny_1(a)\\
&C^1{}_nJ_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)+D^1{}_nY_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)=C^2{}_nJ_{n+\frac{1}{2}}(\xi_2 b)\\
&C^1{}_nj_1(b)+D^1{}_ny_1(b)=\frac{\mu_1}{\mu_2}j_2(b)
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

電磁場の各成分は次の如くである．

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{B}^\lambda{}_r&=\frac{n(n+1)}{r\sqrt{r}}[C^\lambda{}_nJ_{n+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)+D^\lambda{}_nY_{n+\frac{1}{2}}(\xi_\lambda r)]\,P^l{}_n(\cos\theta)e^{-i(pt+l\alpha)}\\
\mathfrak{B}^\lambda{}_\theta&=\frac{1}{r\sqrt{r}}[C_n{}^\lambda j_\lambda(r)+D^\lambda{}_ny_\lambda(r)]\frac{\partial P^l{}_n(\cos\theta)}{\partial\theta}e^{-i(pt+l\alpha)}
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{B}^{\lambda}{}_{\alpha}&=-\frac{li}{r\sqrt{r}\sin\theta}[C^{\lambda}{}_{n}j_{\lambda}(r)+D^{\lambda}{}_{n}y_{\lambda}(r)]\,P^{l}{}_{n}(\cos\theta)e^{-i(pt+l\alpha)}\\
\mathfrak{E}^{\lambda}{}_{r}&=0\\
\mathfrak{E}^{\theta}{}_{\lambda}&=\frac{lp}{c\sqrt{r}\sin\theta}[C^{\lambda}{}_{n}J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{\lambda}r)+D^{\lambda}{}_{n}Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{\lambda}r)]\,P^{l}{}_{n}(\cos\theta)e^{-i(pt+l\alpha)}\\
\mathfrak{E}_{\alpha}{}^{\lambda}&=-\frac{pi}{c\sqrt{r}}[C^{\lambda}{}_{n}J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{\lambda}r)+D^{\lambda}{}_{n}Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{\lambda}r)]\frac{\partial P^{l}{}_{n}(\cos\theta)}{\partial\theta}e^{-i(pt+l\alpha)}
\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

(27) より $D_n{}^0$ を求むれば次の如くになる.

$$D^{0}{}_{n}=\left[\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)R_n-\mu_1 j_0(a)S_n}{-Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)R_n+\mu_1 y_0(a)S_n}\right]C^{0}{}_{n}\tag{30}$$

但し

$$\left.\begin{aligned}
R_n&=\frac{\mu_1}{\mu_2}j_2(b)\{J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)y_1(a)-j_1(a)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)\}+J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_2 b)\{j_1(a)y_1(b)-j_1(b)y_1(a)\}\\
S_n&=\frac{\mu_1}{\mu_2}j_2(b)\{J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)-J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 b)\}\\
&\qquad+J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_2 b)\{J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)y_1(b)-j_1(b)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)\}
\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

實際に觀測される地磁氣，地電流の成分間の關係を對比してみよう.

i) 磁場鉛直成分と地電流南北成分

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{B}^{0}{}_{r}}{\mathfrak{E}^{1}{}_{\theta}}=\frac{1}{l}n(n+1)\sin\theta\frac{c}{pa}\\
&\frac{c}{pa}=\frac{cT}{2\pi a};\quad T=24^{\mathrm{h}}\cdots\cdot\frac{c}{pa}=\frac{3\times10^{10}\cdot8.64\times10^{4}}{2\pi\cdot6.37\times10^{8}}=6{\cdot}5\times10^{5}(\Gamma/\mathrm{e.s.u.})=2.2\,(\gamma/\mathrm{mv/km})
\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

ii) 磁場南北成分と地電流東西成分

$$\frac{\mathfrak{B}^{0}{}_{\theta}}{\mathfrak{E}^{1}{}_{\alpha}}=-\frac{c}{api}\frac{C^{0}{}_{n}j_0(a)+D^{0}{}_{n}y_0(a)}{C^{1}{}_{n}J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)+D^{1}{}_{n}Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_1 a)}\tag{33}$$

この式は (27) 第一式及び (L_1) に依つて，次の如くに變形される.

$$\frac{\mathfrak{B}^{0}{}_{\theta}}{\mathfrak{E}^{1}{}_{\alpha}}=-\frac{c}{api}\frac{1}{\mu_1}\frac{R_n}{S_n}.\tag{33.1}$$

外層の厚さが充分小さければ

$$\left.\begin{aligned}
J_\nu(\xi b)&=J_\nu(\xi a)-\delta\xi aJ_\nu'(\xi a)\\
J_\nu(\xi b)&=Y_\nu(\xi a)-\delta\xi aY_\nu'(\xi a)
\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

としてよい. この式と次の Lommel の式

$$J_\nu(z)Y_\nu'(z)-J_\nu'(z)Y_\nu(z)=\frac{2}{\pi z}.\tag{L$_2$}$$

に依つて，$\dfrac{R_n}{S_n}$ を求むれば

$$\frac{R_n}{S_n}=\left[\frac{\xi_1 a\left[\left\{\dfrac{n(2+(2n+1)\delta)}{\xi_1 a}\left(1-\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)-2\delta\xi_1 b\right\}J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_2 b)+\dfrac{\mu_1\xi_2 b}{\mu_2\xi_1 a}(2+(2n+1)\delta)J_{n-\frac{1}{2}}(\xi_2 b)\right]}{\left\{2n\delta\left(1-\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)+\dfrac{b}{a}(2-(2n+1)\delta)\right\}J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_2 b)+2\delta\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\xi_2 b J_{n-\frac{1}{2}}(\xi_2 b)}-n\right]$$

$$=\xi_1 a Q_n-n \tag{35}$$

とすることが出來る．

Q_n は又，次の如き形にすることが出來る．

$$Q_n=Q_n' e^{-\iota\varphi_n} \tag{35.1}$$

依つて，(33) は次の如くになる．

$$\frac{\mathfrak{B}^0_\theta}{\mathfrak{E}'_a}=-\frac{c}{api}\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\sqrt{4\pi\sigma_1\mu_1 p}}{c}aQ_n' e^{\iota\frac{\pi}{4}}e^{-\iota\varphi_n}-n\right]$$

$$=-\frac{1}{i}\left[\sqrt{\frac{2\sigma_1 T}{\mu_1}}Q_n' e^{\iota\left(\frac{\pi}{4}-\varphi_n\right)}-\frac{ncT}{2\pi a\mu_1}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2\sigma_1 T}{\mu_1}}Q_n' e^{\iota\frac{\pi}{2}+\iota\left(\frac{\pi}{4}-\varphi_n\right)}-\frac{ncT}{2\pi a\mu_1}e^{\iota\frac{\pi}{2}}. \tag{33·2}$$

一例として $n=2$, $\delta=0.3$, $\mu_1=1$, $\mu_2=3$, $\sigma_1=21.8\times10^8$ e.s.u., $\sigma_2=360\sigma_1$ なる多合の Q_n の大いさを示す．

i)　$T=24^{\mathrm{h}}$ ならば $\rho_1 a=30$,　　$Q_2=0.27\,e^{-\iota 59°}$

ii)　$T=10^{\mathrm{m}}$ ならば $\rho_1 a=360$,　　$Q_2=0.10\,e^{-\iota 81°}$

§5. 外部磁場と內部磁場

この章に於ては，磁場の關係のみを考へる．變化源より地表面に到達した變化，所謂，外部磁場と，地球の存在する爲にに生ずる二次的の變化卽ち，內部磁場との關係を考へてみよう．

空氣中に於ける內部磁場と外部磁場の比は，次の如くである．$r=a$ とする．

$$\frac{D_n^0 Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)}{C_n^0 J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)}=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)R_n-\mu_1 j_0(a)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)S_n}{-J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)R_n-\mu_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)y_0(a)S_n}$$

$$=-\left[1+\frac{\dfrac{2\mu_1}{\pi}S_n}{J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)R_n-\mu_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)y_0(a)S_n}\right] \tag{36}$$

空氣中に於ては，$\xi_0 a$ の値は非常に小さい．例へば $T=24^{\mathrm{h}}$ に於て $\xi_0 a=1.4\times10^{-5}e^{\iota\frac{\pi}{4}}$ であるから，近似的に

$$\left.\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}\left(\frac{\xi_0 a}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\ Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a) &= -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left(\frac{\xi_0 a}{2}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

とすることが出來る. 然すれば:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a) = \frac{-1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} = \frac{-2}{(2n+1)\pi}.$$

$$\xi_0 a J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_0 a)Y_{n-\frac{1}{2}}(\xi_0 a) = \frac{-1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{1}{2}(\xi_0 a)^2 = \frac{2(\xi_0 a)^2}{(1-4n^2)\pi}.$$

となり, 第二式は第一式に比して省略することが出來る.

依つて, (36) は次の如くになる.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{內部磁場}}{\text{外部磁場}} &= -\left[1-\frac{\frac{2\mu_1}{\pi}S_n}{\frac{2}{(2n+1)\pi}(R_n+n\mu_1 S_n)}\right] = -\left[1-\frac{1}{\omega}\right] \\ w &= \frac{1}{(2n+1)\mu_1}\frac{R_n}{S_n}+\frac{n}{2n+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (36.1)$$

この式に見る如く, 內部磁場は, 地殼內の物理常數に關係する. 吾々は, 極めて簡單に, 不連續層が只一つある場合に就て考察して來たのであるが, 實際は, もつと複雜な構造をなすかも知れぬ. 更に, 地殼內深部の電導率, 誘磁率は容易に知ることが出來ないのであるから, 計算に依つて, 直ちに, 內部磁場の大いさを求むることが出來ない. 然しながら, 吾々は, 實際の觀測材料を用ひて, 內外兩磁場を分析することが出來る.

吾々は, (36.1) に於て, 地殼內部の σ, μ に適當な假定を設けた場合, 實際の解析結果と一致せしむることが出來るか否か, 又それが出來るならば, それに對應する地殼構造を考へてみようと思ふ.

實測の內外磁場の解析は, Dr. S. Chapmann に依つて爲された. 吾々は, その結果を借用して, 第一表に示す. この表に於て "外部磁場" の欄には解析の結果をその儘に, "內部磁場" の欄には, 內部磁場の振幅の外部磁場の夫に對する "振幅比" と, 內部磁場の位相より外部磁場の夫を減じたる "位相差" とを示してある. 表中, italic 體にて示せる量は, 太陰日變化より求めた結果

である[1]

第　一　表

n^*	T^*	外部磁場		内部磁場	
		振幅	位相	振幅比	位相差
2	24^h	4.99$^\gamma$ *0.335*	300° *11*	0.34 *0.35*	20° *23*
3	12	2.95 *0.330*	297 *353*	0.45 *0.55*	18 *29*
4	8	1.20 *0.166*	312 *16*	0.42 *0.36*	11 *19*

n^*	T^*	外部磁場		内部磁場	
		振幅	位相	振幅比	位相差
1	24^h	3.20$^\gamma$ *0.419*	291° *342*	0.36 *0.42*	9° *31*
2	12	1.50 *0.512*	328 *347*	0.39 *0.53*	18 *6*
3	8	0.70 *0.211*	0 *4*	0.70 *0.53*	2 *12*

吾々の場合には，Try and Error Method に依つて，$\mu_1=1$, $\mu_2\approx3$, $\sigma_1\approx22\times10^8$, $\sigma_2\approx300\sim400\sigma_1$, $\delta\approx0.3$ なる場合に，大體，上の結果に近い値を得ることが分る．第二表に，$\mu_1=1$, $\mu_2=3$, $\sigma_1=21.8\times10^8$, $\sigma_2=360\sigma_1$, $\delta=0.3$ とした場合の例を舉げる．

第　二　表

n	T	振幅比	位相差	n	T	振幅比	位相差
2	24^h	0.41	22°	1	24^h	0.60	11°
3	12	0.38	31	2	12	0.51	19
4	8	0.34	40	3	8	0.43	28

不連續層の深さが $\delta=0.3$ のときは，地下約 1900 粁に相當する．一方，地震波の傳播に關する研究に依れば，一般的に觀て，地下 1200 粁及び 2900 粁に構造上の不連續があり，外層 (0–1200 dm)，中間層 (1200–2900 km) 及び內核 (<2900 km) の三層に分たれてゐる．地殼內の比重分布，重力分布及び壓力分布等に就ても，この三重構造が有力である．而して，外層と內核とは著しい相違を示し，中間層は夫等の間にあつて，漸變的である．

吾々の場合は，兩不連續層の中程に相當して，一の不連續層があることになる．

これより觀て，地殼の三重構造が，地球電磁場に就ても，役割を持つであらう事が考へられる．然有ればこそ，吾々の場合，不連續層の位置が中間層內にあることになるのが當然の歸結と想像される．

嘗て，S. Chapmann は，內外兩磁場を說明するに，200 粁內外の外部不導體殼と，一樣なる導體核を以てしたが，吾々の場合は，是に比して遙に realistic であると考へられる．

(1) Handb. d. Experimentalphysik, Bd. 25, I, S. 638, 1928.

* n, T は吾々の場合と同じ意味に用ひる．太陰日變化にあつては，T を太陰時にて測るものとする．

§6. 理論と實際の比較考察

吾々の理論に從へば，(22) に依つて，地表に於て空中電位差 1 volt/cm の變化に對して，場の地理的分布に依る影響を考へなければ，地磁氣南北成分に於て，凡そ 0.04γ の變化が對應し，位相は，空中電位差の變化を $\sin pt$ とすれば，南北成分は $\cos pt$ なる形を有す．而して，夫等の相互關係は，空氣中の電導率の大いさにのみ依存する．

地電流東西成分に於ては，空中電位差 1 volt/cm に對して，場の地理的分布に依る影響を考へずに，$T=24^{\mathrm{h}}$ のとき約 4×10^{-2} mv/km の變化が對應し，位相は地電流の方が，凡そ 20° だけ後れることになる．

實際には，靜穩なる日の空中電位差の日變化較差は 1〜2 volt/cm 程度である．然るに，是に對應する磁場，地電流の變化の大いさは，上の如く小さなものであるから，夫等間の相互關係を實測に就て明らかにすることは困難である．

尙，空中電位差が一定の型の日變化をなすことは否定し難い事實であるから，吾々は，變化源（是は K·H 層内にあると考へられる）に於て，鉛直方向の電流（又は是に等價なる他の因子）の變化が存在するものとせねばならない．

次に，地磁氣，地電流に於て，理論的には，磁場の鉛直成分と地電流南北成分とが對應し，場の地理的分布に依る相違を考へなければ，地殼内の物理常數の如何に不拘，例へば，週期 24^{h} のとき，地電流南成分 1 mv/km の增加に對し，磁場鉛直成分 2γ の增加* が期待される．週期が小さくなれば，對應する鉛直成分も小さくなる．以上は，實際に於ても行はれてゐる關係である．

地磁氣南北成分と，地電流東西成分の關係は，(33·2) に依つて示される．今，少しく是に就て考察しよう．

不連續層に關する前章の條件を用ひ，(33·2) に依つて，振幅比及び位相差を計算し，實測より求めたるものとを比較してみる．

第　三　表

n	T	理論値		實測値			
				豊原		柿岡	
		振幅比	位相差	振幅比	位相差	振幅比	位相差
	h	γ/mv/km	°	γ/mv/km	°	γ/mv/km	°
2	24	13.4	71	5.3	52	1.2	52
3	12	7.9	67	3.0	45	1.8	25
4	8	5.5	64	2.3	43	1.5	30

* 實際には，地磁氣鉛直分力は，下方に向ふものを正とするから，鉛直分力の減少に當る．

實測の場合，日變化の年平均値を用ふれば，大體，晝夜平分時に於ける値に近いものと見做すことが出來，地理的分布は赤道に對して對稱であるから，$P_n^{n-1}(\cos\theta)$ なる形に展開出來る．第三表に，理論値と，日變化年平均値を調和分析して，同一週期のものゝ振幅比と位相差を求めたものを示す．

位相差は，地電流東西成分に對する磁場水平分力の後れである．

理論値と實際とが一致しないのは，恐らく，地殼外層の電導率 σ_1 は，地表と不連續層間の一種の平均値であると見るべきもので，實際，地下數十米までは，電導率は著しい變化を呈するものであることに依るものであらう．

短週期の場合は，便宜上，$n=2$, $T=10^m$ として計算してみる．然るとき振幅比＝0.53 γ/mv/km 位相差＝50° である．

實際に於ては，振幅比＝050[(1)] γ/mv/km ($T=3.9^m$)，位相差＝64°[(2)*] ($T=149^s$) なることが報告されてゐる．週期が短くなる程，(33.2) 右邊第二項は，第一項に比して速に 0 に近づくから，第一項が主要な項となり，理論と實際の違ひは，地表附近，詳しくは，地電流測定の極板埋設の深さに於ける電導率の大いさに關係することになる．又，週期が短い場合には，地殼內部に於ける減衰が著しくなるから，地表面附近の電導率に支配される樣になる．それであるから，短週期のものの實測に依つて，表層の電導率を求むることが出來る．柿岡に於ける材料を用ひ，抵抗率 $\frac{1}{\sigma}=2\times10^5$[(3] Ω ($\sigma=4.5\times10^6$ e s.u) なる結果が報告されてゐる．

結　び

以上は，從來，部分的に論ぜられてゐた，電磁場の性質を統一したに過ぎない．只一つ注目さるべきものは，電磁場の變化より考へても，地殼の不連續的構造が推論され，夫が他の分科の推定と一致することである．

(於豊原臨時地磁氣觀測所)

(1) 平山： 地電流及び地磁氣變化の間の關係に就て　氣象集誌　十二卷　一號
(2) 畠山，平山： 地磁氣及び地電流の脈動の位相差に就て　〃　〃　九號
* 原文に於ては 26° としてあるが，吾々の場合と同じ意味にすれば 64° である．
(3) 山本： 地球電磁場の擾亂に就て　氣象集誌　十五卷　二號